数理解析研究所講究録
第 1825 巻 2013 年 185-196

Correlations of multiplicities in length spectra for congruence subgroups

橋本康史（琉球大学）

概要

Length spectrum は，リーマン面上の素な閉測地線の長さの集合として定義される．Bogomolny-Leyvraz-Schmit (1996) と Peter (2002) は，モジュラー群に関するリーマン面上の length spectrum の重複度の 2 乗和に関する漸近公式を導いた．本稿では，その漸近公式を任意のべき乗和および任意の合同部分群に対して拡張できたので，その成果をまとめる．なお，本稿では証明を大幅に省略したが，詳細は [8] を参照していただきたい．

1 導入

$H := \{x+y\sqrt{-1}, y>0\}$ を複素上半平面，Γ を $\mathrm{vol}(\Gamma\backslash H)$ が有限になるような $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の離散部分群とする．$\mathrm{Prim}(\Gamma)$ を Γ の素な双曲的共役類の集合，$N(\gamma)$ を $\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)$ の固有値の大きいほうの 2 乗とする．このとき，次の漸近式が成り立つ（素測地線定理，[20, 9]）．

$$\pi_\Gamma(x) := \#\{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)\mid N(\gamma)<x\}\sim \mathrm{li}(x)\quad \text{as}\quad x\to\infty. \tag{1}$$

次に $\mathrm{Tr}(\Gamma)$ を $\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)$ の $\mathrm{tr}\gamma$ の集合，$m_\Gamma(t)$ を $\mathrm{tr}\gamma=t$ をみたす $\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma)$ の個数．ここで，

$$\mathrm{tr}\gamma = N(\gamma)^{1/2}+N(\gamma)^{-1/2},\qquad N(\gamma)^{1/2}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\gamma+\sqrt{(\mathrm{tr}\gamma)^2-4}\right),$$

なので，$\{(t, m_\Gamma(t))\}_{t\in\mathrm{Tr}(\Gamma)}$ を $\Gamma\backslash H$ 上の *length spectrum* とみなせる．また，素測地線定理 (1) は次のように記述できる．

$$\pi_\Gamma(x^2)=\sum_{\substack{t\in\mathrm{Tr}(\Gamma)\\ t<x}} m_\Gamma(t)\sim \mathrm{li}(x^2). \tag{2}$$

Length spectrum はリーマン面を特徴づけ，という観点から重要な研究対象である．というのも，2 つのコンパクトリーマン面において，length spectrum が一致することとラプラシアンのスペクトルが一致することは同値である，ということが知られている（[Huber]）．加えて，セルバーグの跡公式の幾何サイドが length spectrum で記述できることから，跡公式は length spectrum とラプラシアンのスペクトルの関係式を与えているといえる．

ラプラシアンの固有値と比べると，length spectrum は 2×2 行列の跡で与えられるので，直感的にわかりやすそうな感じがする．しかし実際には，わかっていることは必ずしも多くなく，モジュラー群と同じ 2 元生成のヘッケ三角形群に対してすら，length spectrum を初等的にあらわすことは今の

ところできていない．また，その漸近的な挙動については，重複度 $m_\Gamma(t)$ が任意の Γ について非有界であること [15] や，素測地線定理から重複度の和が (2) とあらわされることが知られているが，一般的にこれ以上のことはわかっていない．実はこれに対しては，「length spectrum の漸近的な挙動には，一般的に何か法則性があるはずだが，まだわかっていない」のではなく，「Γ によって，挙動が違う」と指摘する研究者も少なくない．とくに，Γ が数論的（arithmetic）の場合には重複度が大きく，そうでないときには重複度は小さい，と考えられており，この相違点は，ラプラシアンの固有値の分布にも影響を与えている，ともいわれている [2, 3, 12, 13] が，厳密な証明はまだまだ先のようである（[22, 12, 18, 6]）．

本稿では，Γ がモジュラー群およびその合同部分群であるとき $m_\Gamma(t)$ の増大度について調べる．モジュラー群の場合には明らかに $\mathrm{Tr}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})) = \mathbb{Z}_{\geq 3}$ であり，合同部分群の場合にも $\mathrm{Tr}(\Gamma) \subset \mathbb{Z}_{\geq 3}$ であることはすぐにわかる．なので，これらの群に関する素測地線定理 (2) は整数に関する和として，次のように書ける．

$$\pi_\Gamma(x^2) = \sum_{3\leq t<x} m_\Gamma(t) \sim \mathrm{li}(x^2). \tag{3}$$

一般に，$m_\Gamma(t)$ を初等的な対象を使って表すことは難しいが，合同部分群のときは $m_\Gamma(t)$ を不定値2元2次形式の類数を用いて表せる ([17, 7], Proposition 2.1, 2.2). Bogomolny-Leyvraz-Schmit [3] や Peter [14] は，古典的な解析数論における類数に関する研究成果やそこで用いられたアプローチを応用し，$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と整数 $r \geq 0$ について次の漸近公式を得た．

$$\pi^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(x^2; r) := \sum_{3\leq t<x} m_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(t) m_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(t+r) \sim c^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(r)\mathrm{li}_2(x^3). \tag{4}$$

ここで，$\mathrm{li}_2(x) := \int_2^x (\log t)^{-2} dt$ で，$c^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(r)$ は素数に関する積であらわされる定数である ([3, 14]). さらに，Lukianov[11] は合同部分群 $\Gamma_0(n)$ と不定値四元数環の単数群から得られる余コンパクトな Γ に対して，同様の漸近公式を得た．実は，この漸近公式にあらわれる定数 $c^{(2)}_\Gamma(0)$ は，ラプラシアンの固有値のばらつきを表す number variance に関する漸近式にあらわれる（[16, 11]）ことが知られている．

本稿の主結果は以下のとおりである．

Theorem 1.1. $k \geq 2$ を整数，$\mathbf{r} := (r_1, \cdots, r_k) \in \mathbb{Z}^k$ とし，Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群とする．このとき，次が成り立つ．

$$\pi^{(k)}_\Gamma(x^2; \mathbf{r}) := \sum_{3\leq t<x} m_\Gamma(t+r_1)\cdots m_\Gamma(t+r_k) \sim c^{(k)}_\Gamma(\mathbf{r})\mathrm{li}_k(x^{k+1}),$$

ここで，$\mathrm{li}_k(x) := \int_2^x (\log t)^{-k} dt$ で，$c^{(k)}_\Gamma(\mathbf{r})$ は定数である（具体的な記述は *Theorem 3.1* で述べる）．

2 合同部分群に関する length spectrum

自然数 $n \geq 1$ に対して，$\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

$$\Gamma(n) := \mathrm{Ker}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \overset{\mathrm{proj.}}{\to} \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_n)\big) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv I \bmod n\},$$

$$\hat{\Gamma}(n) := \mathrm{Ker}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \overset{\mathrm{proj.}}{\to} \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_n)\big) = \{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid \gamma \equiv \alpha I \bmod n, \alpha^2 \equiv 1 \bmod n\},$$

とおく．本稿では，Γ が $\hat{\Gamma}(n) \subset \Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ で，すべての $m < n$ に対して，$\Gamma \not\supset \hat{\Gamma}(m)$ であるとき，Γ を階数 n の合同部分群という．

この節では，合同部分群に関する length spectrum を不定値2元2次形式を用いてあらわす．

2.1 2次形式とモジュラー群

まず，

$$Q(x,y) = [a,b,c] := ax^2 + bxy + cy^2$$

を係数 $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ($\gcd(a,b,c) = 1$) をもつ2元2次形式とし，$D = D(Q) := b^2 - 4ac$ を $[a,b,c]$ の判別式とする．$Q(x,y) = Q'\big((x,y).g\big)$ をみたす $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が存在するとき，2つの2次形式 Q と Q' が同値である ($Q \sim Q'$) という．$h(D)$ を判別式 D をもつ2次形式の同値類の個数とする．判別式 D が正であるとき，ペル方程式 $t^2 - Du^2 = 4$ の解 (t,u) が無限に存在することが知られている．$t^2 - Du^2 = 4$ の j 番目の正の解を $(t_j, u_j) = (t_j(D), u_j(D))$ と書き，$\epsilon_j(D) := (t_j(D) + u_j(D)\sqrt{D})/2$ とおく．$\epsilon(D) = \epsilon_1(D)$ は D の狭義の基本単数とよばれており，$\epsilon_j(D) = \epsilon(D)^j$ をみたす．

2次形式 $Q = [a,b,c]$ とペル方程式の正の解 (t,u) に対して，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の元

$$\gamma\big(Q,(t,u)\big) := \begin{pmatrix} \dfrac{t+bu}{2} & -cu \\ au & \dfrac{t-bu}{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}). \tag{5}$$

を定義する．逆に，$\gamma = (\gamma_{ij})_{1 \le i,j \le 2} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して，

$$\begin{aligned} &t_\gamma := \gamma_{11} + \gamma_{22}, \quad u_\gamma := \gcd(\gamma_{21}, \gamma_{11} - \gamma_{22}, -\gamma_{12}), \\ &a_\gamma := \gamma_{21}/u_\gamma, \quad b_\gamma := (\gamma_{11} - \gamma_{22})/u_\gamma, \quad c_\gamma := -\gamma_{12}/u_\gamma, \\ &Q_\gamma := [a_\gamma, b_\gamma, c_\gamma], \quad D_\gamma := \frac{t_\gamma^2 - 4}{u_\gamma^2} = b_\gamma^2 - 4a_\gamma c_\gamma \end{aligned} \tag{6}$$

とおく．(5) と (6) は，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の素な双曲類と原始的不定値2元2次形式の同値類の間の1対1の対応を与えている ([17] と [5] の第5章を参照)．なので，$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の場合の重複度 $m_\Gamma(t)$ は次のようにあらわされる．

Proposition 2.1. $t \ge 3$ を整数とすると，次が成り立つ．

$$m_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(t) = \sum_{u \in U(t),\, j_{t,u} = 1} h(D_{t,u}),$$

ここで，$D_{t,u} := (t^2-4)/u^2$，$U(t) := \{u \ge 1 \mid u^2 \mid t^2 - 4, D_{t,u} \equiv 0, 1 \bmod 4\}$，

$$j_{t,u} := \max\left\{ j \ge 1 \mid \epsilon_j(D_{t,u}) = \frac{1}{2}\left(t + \sqrt{t^2-4}\right)\right\}$$

である．

2.2 合同部分群の場合

Venkov-Zograf の公式 [23] を使うと，次が成り立つことが分かる．

$$\hat{m}_\Gamma(t) := \sum_{\substack{\gamma\in\mathrm{Prim}(\Gamma), j\geq 1\\ t_{\gamma^j}=t}} \frac{1}{j} = \sum_{\substack{\gamma\in\mathrm{Prim}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})), j\geq 1\\ t_{\gamma^j}=t}} \frac{1}{j}\mathrm{tr}\chi_\Gamma(\gamma^j), \tag{7}$$

ここで，$\chi_\Gamma := \mathrm{Ind}_\Gamma^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}1$ である．Γ が合同部分群である場合，$\mathrm{tr}\chi_\Gamma(\gamma)$ は (t_γ, u_γ) にのみ依存するので，次が得られる．

Proposition 2.2. $n\geq 1$ と $t\geq 3$ を整数とし，Γ を階数 n の合同部分群とする．すると，次が成り立つ．

$$\hat{m}_\Gamma(t) = \sum_{u\in U(t)} \frac{1}{j_{t,u}}\omega_\Gamma(t,u)h\left(D_{t,u}\right), \tag{8}$$

ここで，$0\leq \omega_\Gamma(t,u)\leq [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}):\Gamma]$ である．

3 Theorem 1.1 の証明

3.1 係数 $c_\Gamma^{(k)}(\mathbf{r})$ の表示

Theorem 1.1 の係数 $c_\Gamma^{(k)}(\mathbf{r})$ は次のように記述できる．

Theorem 3.1. $t\geq 3$ を整数，Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群，

$$I_\Gamma(t) := \frac{\log\left(\frac{1}{2}(t+\sqrt{t^2-4})\right)}{\sqrt{t^2-4}}\hat{m}_\Gamma(t)$$

とする．このとき，任意の $k\geq 1$，$\mathbf{r} := (r_1,\cdots,r_k)\in\mathbb{Z}^{k-1}$ に対して，極限

$$c_\Gamma^{(k)}(\mathbf{r}) := \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sum_{3\leq t\leq x} I_\Gamma(t+r_1)\cdots I_\Gamma(t+r_k)$$

が存在し，

$$c_\Gamma^{(k)}(\mathbf{r}) = \prod_p \left(\lim_{l\to\infty} p^{l(k-1)} \sum_{m\in\mathbb{Z}_{p^l}} F_\Gamma(m+r_1;p^l)\cdots F_\Gamma(m+r_k;p^l)\right)$$

が成り立つ．ただし，

$$F_\Gamma(m;n) := \frac{\#\{\gamma\in\Gamma(n)\backslash\Gamma(n)\Gamma \mid \mathrm{tr}\gamma\equiv m \bmod n\}}{\#\Gamma(n)\backslash\Gamma(n)\Gamma}$$

である．

"Theorem 3.1 $\Rightarrow$ Theorem 1.1"であることは容易にわかるので，以下，Theorem 1.1 の代わりに Theorem 3.1 を証明する．

3.2 $I_\Gamma(t)$ を周期関数で近似する

Peter[14] はモジュラー群の場合に，$I_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(t)$ を周期関数で近似し，その性質を使って $m_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(t)$ の 2 乗和に関する結果を得た．本稿では，その手法を踏襲する．なお，本節の算術関数に関する議論については [19] を参照すると理解しやすい．

整数 $q \geq 1$ と算術関数 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ に対して，セミノルム

$$||f||_q := \left(\limsup_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{1 \leq n \leq x} |f(n)|^q \right)^{1/q}$$

を定義する．任意の $\epsilon > 0$ に対して，$||f - h||_q < \epsilon$ をみたす周期関数 h が存在するとき，関数 f を q-limit periodic function とよぶ．$\mathcal{D}^q$ を q-limit periodic function の集合とすると，$||f_1 - f_2||_q = 0$ なる関数 f_1, f_2 を同一視することで，$\mathcal{D}^q$ はノルム $|| * ||_q$ をもつバナッハ空間になる．

ここで，周期関数の性質から，次の命題が成り立つことがわかる．

Proposition 3.2. *$q \geq 1$ を整数，$f_1, \cdots, f_q \in \mathcal{D}^q$ で，f_i は周期関数の列 $\{f_{ij}\}_{j \geq 1}$ によって近似される，つまり，$||f_{ij} - f_i||_q \to 0$ $(j \to \infty)$ をみたすとする．このとき，$f_{1j}, \cdots, f_{qj}$ は同じ周期 N_j $(\lim_{j\to\infty} N_j = \infty)$ をもつと考えてよい．すると，次が成り立つ．*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{1 \leq t \leq x} f_1(t) \cdots f_q(t) = \lim_{j \to \infty} N_j^{q-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{N_j}} F_{1j}(m; N_j) \cdots F_{qj}(m; N_j).$$

ここで，

$$F_{ij}(m; N_j) := \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{1 \leq t \leq x \\ t \equiv m \bmod N_j}} f_{ij}(t) = \frac{1}{N_j} f_{ij}(m)$$

である． □

次に，I_Γ が q-limit periodic であることを示す．I_Γ の定義と類数公式から，

$$I_\Gamma(t) = \sum_{u \in U(t)} \omega_\Gamma(t, u) u^{-1} L(1, D_{t,u})$$

とあらわせる．ここで，$L(1, D_{t,u}) := \prod_p \left(1 - (D_{t,u}/p)p^{-1}\right)^{-1}$ である．整数 $P \geq 2, M \geq 1$ に対して，

$$\beta_{\Gamma,P,M}(t) := \sum_{\substack{u \in U(t) \\ p|u \Rightarrow p \leq P \\ \mathrm{ord}_p u \leq M}} \omega_\Gamma(t, u) u^{-1} \prod_{p \leq P} \left(1 - (D_{t,u}/p)p^{-1}\right)^{-1}$$

とおく．$\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のとき，$\beta_{\Gamma,P,M}(t)$ は周期 $B_{P,M} := 2^{2M+3} \prod_{2 < p \leq P} p^{2M+1}$ をもつ関数である．Peter [14] はすべての $q \geq 1$ に対して，$I_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}$ が $\beta_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),P,M}$ で近似できる q-limit periodic な関数であることを示した．

また，Γ が階数 n の合同部分群であるとき，$\omega_\Gamma(t, u)$ は有限群 $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_n)$ の指標から得られているので，$\beta_{\Gamma,P,M}(t)$ は周期 $n^2 B_{P,M}$ をもつ関数であることが分かる．このとき，モジュラー群に関する Peter [14] の結果を使うと，合同部分群に関しても，任意の q に対して，$I_\Gamma \in \mathcal{D}^q$ であることが分かる．

Lemma 3.3. 任意の $q \geq 1$ に対して,

$$||I_\Gamma - \beta_{\Gamma,P,M}||_q \ll P^{-\epsilon} + 2^{-M}(\log P)^2 \quad as \quad P, M \to \infty$$

をみたす定数 $\epsilon > 0$ が存在する.

Proof. $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のときは, Peter [14] の Lemma 3.1, Proposition 3.7, Corollary 4.2 によって示されている. あとは, $0 \leq \omega_\Gamma(t,u) \leq [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma]$ であることを利用すれば, 合同部分群に対しても証明できる. □

3.3 $I_\Gamma(t)$ の部分和

ここでは, Theorem 3.1 にある $c_\Gamma^{(k)}(\mathrm{r})$ の表示を得るために, $I_\Gamma(t)$ の部分和に関する漸近式を求める. まず, チェボタレフ型素測地線定理を準備する.

Theorem 3.4. *(チェボタレフ型素測地線定理, [17, 21])* Γ_1, Γ_2 を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ の離散部分群で, $\mathrm{vol}(\Gamma_1 \backslash H) < \infty$, $\Gamma_1 \rhd \Gamma_2$, $[\Gamma_1 : \Gamma_2] < \infty$ をみたすとする. このとき, $[g] \in \mathrm{Conj}(\Gamma_2 \backslash \Gamma_1)$ に対して,

$$\#\{\gamma \in \mathrm{Prim}(\Gamma_1) \mid \sigma(\gamma) \subset [g], N(\gamma) < x\} \sim \frac{\#[g]}{\#\Gamma_2 \backslash \Gamma_1} \mathrm{li}(x) \tag{9}$$

が成り立つ. ここで, $\sigma : \Gamma_1 \to \Gamma_2 \backslash \Gamma_1$ は自然な射影である. □

跡 $\mathrm{tr}\gamma$ は共役関係で保存されるので, Theorem 3.4 を使うと次の補題を得る.

Lemma 3.5. $N \geq 1$ を整数とし, $m \in \mathbb{Z}_N$, Γ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群とする. このとき, 次が成り立つ.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sum_{\substack{3 \leq t \leq x \\ t \equiv m \bmod N}} I_\Gamma(t) = \frac{\#\{\gamma \in \Gamma(N) \backslash \Gamma\Gamma(N) \mid \mathrm{tr}\gamma \equiv m \bmod N\}}{\#\Gamma(N) \backslash \Gamma\Gamma(N)}.$$

□

$N = p^r, \Gamma\Gamma(p^r) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のとき, Lemma 3.5 の右辺は次のような値をとる.

Lemma 3.6. $p = 2, r \geq 6$ のとき, 次が成り立つ.

$$\#\{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_{2^r}) \mid \mathrm{tr}\gamma \equiv t \bmod 2^r\}$$
$$= \begin{cases} 2^{2r-1} & (2 \nmid t), \\ 3 \cdot 2^{2r-2}, & (4 \mid t), \\ 3 \cdot 2^{2r-1}, & (t \equiv 16t_1 \pm 2 \bmod 2^r, t_1 \equiv 5 \bmod 8, \\ & \quad \mathit{or}\ t \equiv 2^l t_1 \pm 2 \bmod 2^r, t_1 \equiv 1 \bmod 8,\ l \geq 6\text{: } \mathit{even}), \\ 5 \cdot 2^{2r-2}, & (t \equiv 16t_1 \pm 2 \bmod 2^r, t_1 \not\equiv 5 \bmod 8), \\ 3 \cdot 2^{2r-1} - 2^{2r-l/2}, & (t \equiv 2^l t_1 \pm 2 \bmod 2^r, t_1 \not\equiv 1 \bmod 8,\ l \geq 6\text{: } \mathit{even}), \\ 3 \cdot (2^{2r-1} - 2^{2r-(l+3)/2}), & (t \equiv 2^l t_1 \pm 2 \bmod 2^r, 2 \nmid t_1,\ l \geq 3\text{: } \mathit{odd}), \\ 3 \cdot 2^{2r-1} - 2^{\lfloor (3r-1)/2 \rfloor}, & (t \equiv \pm 2 \bmod 2^r). \end{cases}$$

$p \geq 3, r \geq 1$ のとき，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\#\{\gamma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_{p^r}) \mid \mathrm{tr}\gamma \equiv t \bmod p^r\} \\
&= \begin{cases}
p^{2r-1}(p-1), & ((T/p) = -1), \\
p^{2r-1}(p+1), & ((T/p) = 1 \ \mathit{or}\ p^l \,\|\, T, 2 \mid l, (\frac{T}{p^l}/p) = 1), \\
p^{2r} + p^{2r-1} - 2p^{2r-l/2-1}, & (p^l \,\|\, T, 2 \mid l, (\frac{T}{p^l}/p) = -1), \\
p^{2r} + p^{2r-1} - p^{2r-(l+1)/2} - p^{2r-(l+3)/2}, & (p^l \,\|\, T, 2 \nmid l), \\
p^{2r} + p^{2r-1} - p^{\lfloor (3r-1)/2 \rfloor}, & (T \equiv 0 \bmod p^r),
\end{cases}
\end{aligned}$$

ここで，$T := t^2 - 4$ である． □

3.4 Theorem 3.1 の証明

Lemma 3.3 から，任意の $q \geq 1$ に対して，$I_\Gamma \in \mathcal{D}^q$ であり，I_Γ が $\beta_{\Gamma,P,M}$ で近似できることが分かる．なので，Proposition 3.2 を $f_i(t) = I_\Gamma(t + r_i)$ に適用でき，$\{f_{ij}(t)\}_j = \{\beta_{\Gamma,P,M}(t + r_i)\}_{P,M}$ とすることができる（周期は $\{N_j\}_j = \{n^2 B_{P,M}\}_{P,M}$）．なので，次が成り立つ．

$$c_\Gamma^{(k)}(\mathbf{r}, j) := N_j^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{N_j}} F_{1j}(m; N_j) \cdots F_{kj}(m; N_j) \to c_\Gamma^{(k)}(\mathbf{r}) \quad \text{as} \quad j \to \infty. \tag{10}$$

次に $c_\Gamma^{(k)}(\mathbf{r}, j)$ と

$$\tilde{c}_\Gamma^{(k)}(\mathbf{r}, j) := N_j^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{N_j}} F_1(m; N_j) \cdots F_k(m; N_j)$$

を比較する．ここで，$F_i(m; N_j) := F_\Gamma(m + r_i; N_j)$ である．この 2 つの定数の差は次のように評価できる．

$$\begin{aligned}
\left| c_\Gamma^{(k)}(\mathbf{r}, j) - \tilde{c}_\Gamma^{(k)}(\mathbf{r}, j) \right| \leq & N_j^{k-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}_{N_j}} \sum_{1 \leq l \leq k} F_{1j}(m; N_j) \cdots F_{l-1,j}(m; N_j) \\
& \times |F_{lj}(m; N_j) - F_l(m; N_j)| \, F_{l+1}(m; N_j) \cdots F_k(m; N_j).
\end{aligned} \tag{11}$$

F_{ij} と $\beta_{\Gamma,P,M}$ の定義から，

$$\begin{aligned}
N_j F_{ij}(m; N_j) &= \beta_{\Gamma,P,M}(t + r_j) \\
&\leq [\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma] \left(\prod_{p_1 \leq P} \sum_{0 \leq l \leq M} p_1^{-l} \right) \sum_{p_2 \leq P} (1 - p_2^{-1})^{-1} \ll (\log P)^2
\end{aligned} \tag{12}$$

である．互いに素な n_1, n_2 に対して，

$$F_i(m; n_1 n_2) = F_i(m; n_1) F_i(m; n_2) \tag{13}$$

であり，有限個の N を除いて $\Gamma\hat{\Gamma}(N)=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ なので，

$$N_jF_i(m;N_j)\ll\prod_{p\le P}\frac{p^{2M+1}\#\{\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_{p^{2M+1}})\mid \mathrm{tr}\equiv m+r_i \bmod p^{2M+1}\}}{\#\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_{p^{2M+1}})}$$

が成り立つ．Lemma 3.6 と $\#\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_{p^r})=p^{3r-2}(p^2-1)$ であることから，

$$N_jF_i(m;N_j)\ll\prod_{p\le P}\frac{p^{2M+1}p^{4M+1}(p+1)}{p^{6M+1}(p^2-1)}=\prod_{p\le P}(1-p^{-1})^{-1}\ll\log P \tag{14}$$

である．方程式 (11) に (12), (14) と Lemma 3.3 を適用すると，次を得る．

$$\begin{aligned}\left|c_\Gamma^{(k)}(\mathbf{r},j)-\tilde{c}_\Gamma^{(k)}(\mathbf{r},j)\right|\ll&(\log P)^{2k-2}\sum_{1\le l\le k}\sum_{m\in\mathbb{Z}_{N_j}}|F_{lj}(m;N_j)-F_l(m;N_j)|\\ \le&(\log P)^{2k-2}\sum_{1\le l\le k}||f_{lj}-f_l||_1\\ \ll&(\log P)^{2k-2}(P^{-\epsilon}+2^{-M}(\log P)^2)\to 0\quad\text{as}\quad P,M\to\infty\quad(M\gg\log P).\end{aligned} \tag{15}$$

なので，$c_\Gamma^{(k)}(\mathbf{r})=\lim_{j\to\infty}\tilde{c}_\Gamma^{(k)}(\mathbf{r},j)$ であることが分かる．あとは F_i の乗法性 (13) を使うと，Theorem 3.1 で与えられている $c_\Gamma^{(k)}(\mathbf{r})$ の素数に関する積としての表示式を得る．□

4 例

例として，$\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),\Gamma_0(n),\hat{\Gamma}(n)$ の場合の $c_\Gamma^{(k)}(0)$ を計算する．

4.1 $\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の場合

このとき，明らかに $\Gamma\Gamma(p^l)=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ であり，$\#\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}_{p^r})=p^{3r-2}(p^2-1)$ である．また，$1\le l\le r-1$ に対して，

$$\begin{aligned}\#\{t\in\mathbb{Z}_{p^r}\mid (T/p)=1\}=&p^{r-1}(p-3)/2,\\ \#\{t\in\mathbb{Z}_{p^r}\mid (T/p)=-1\}=&p^{r-1}(p-1)/2,\\ \#\left\{t\in\mathbb{Z}_{p^r}\mid p^l\,||\,T,\left(Tp^{-l}/p\right)=1\right\}=&p^{r-1}(p-1),\\ \#\left\{t\in\mathbb{Z}_{p^r}\mid p^l\,||\,T,\left(Tp^{-l}/p\right)=-1\right\}=&p^{r-1}(p-1),\\ \#\{t\in\mathbb{Z}_{p^r}\mid T\equiv 0 \bmod p^r\}=&2.\end{aligned}$$

なので，これと Lemma 3.6 を組み合わせて計算すると，Theorem 3.1 から，

$$\begin{aligned}c_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}^{(2)}(0)=&\frac{1015}{864}\prod_{p\ge3}\frac{p^2(p^3+p^2-p-3)}{(p-1)^2(p+1)^3},\\ c_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}^{(3)}(0)=&\frac{682495}{428544}\prod_{p\ge3}\frac{p^8+p^7+p^6-5p^5-5p^3-5p^2-p-1}{(p-1)^2(p+1)^2(p^4+p^3+p^2+p+1)}\end{aligned}$$

を得る．なお，$c^{(2)}_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}(0)$ は [3, 14] で得られたものと同一である．

4.2 $\Gamma=\Gamma_0(n)$ の場合

n を奇数とし，$\Gamma_0(n)$ を $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の合同部分群で，元 γ が $n\mid\gamma_{21}$ をみたすものとする．このとき，$p\mid n$ のとき $\Gamma\Gamma(p^r)=\Gamma_0(p^{\min(r,\mathrm{ord}_p n)})$ で，そうでないとき $\Gamma\Gamma(p^r)=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ である．$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}):\Gamma_0(p^N)]=p^{N-1}(p+1)$ なので，$N\le r$ のとき

$$\#\Gamma(p^r)\backslash\Gamma_0(p^N)=p^{3r-N-1}(p-1)$$

である．$\#\left\{\gamma\in\Gamma_0(p^N)/\Gamma(p^r)\mid \mathrm{tr}\gamma\equiv t \bmod p^r\right\}$ は次で与えられる．

Lemma 4.1. p^N,p^r を素べき（$N\le r$）とし，$1\le l\le r-1$ とする．このとき，次が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\#\left\{\gamma\in\Gamma(p^r)\backslash\Gamma_0(p^N)\mid \mathrm{tr}\gamma\equiv t \bmod p^r\right\}\\
&=\begin{cases}
2p^{2r+l/2-N-1}, & (p^l\,\|\,T, 0\le l\le N, 2\mid l, (\frac{T}{p^l}/p)=1),\\
p^{2r-\lfloor (N+1)/2\rfloor}+p^{2r-\lfloor N/2\rfloor-1}, & (p^l\,\|\,T, l\ge N, 2\mid l, (\frac{T}{p^l}/p)=1),\\
p^{2r-\lfloor (N+1)/2\rfloor}+p^{2r-\lfloor N/2\rfloor-1}-2p^{2r-l/2-1}, & (p^l\,\|\,T, l\ge N, 2\mid l, (\frac{T}{p^l}/p)=-1),\\
p^{2r-\lfloor (N+1)/2\rfloor}+p^{2r-\lfloor N/2\rfloor-1}-p^{2r-(l+1)/2}-p^{2r-(l+3)/2}, & (p^l\,\|\,T, l\ge N, 2\nmid l),\\
p^{2r-\lfloor (N+1)/2\rfloor}+p^{2r-\lfloor N/2\rfloor-1}-p^{\lfloor (3r-1)/2\rfloor}, & (T\equiv 0),\\
0, & (\mathit{otherwise}).
\end{cases}
\end{aligned}$$

□

$\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ のときと同じように計算すると，次を得る．

$$\begin{aligned}
c^{(2)}_{\Gamma_0(n)}(0)=&\frac{1015}{864}\prod_{p\ge 3, p\nmid n}\frac{p^2(p^3+p^2-p-3)}{(p-1)^2(p+1)^3}\prod_{p^N\,\|\,n}\frac{2p(Np^2-p-N)}{(p-1)^2(p+1)},\\
c^{(3)}_{\Gamma_0(n)}(0)=&\frac{682495}{428544}\prod_{p\ge 3, p\nmid n}\frac{p^8+p^7+p^6-5p^5-5p^3-5p^2-p-1}{(p-1)^2(p+1)^2(p^4+p^3+p^2+p+1)}\\
&\times\prod_{p^N\,\|\,n}\frac{p^2(p^{\lfloor (N-1)/2\rfloor}h_1(p)-2h_2(p))}{(p-1)^3(p+1)(p^4+p^3+p^2+p+1)}.
\end{aligned}$$

ここで，

$$h_1(p):=\begin{cases}(p+1)(p^6+2p^5+5p^4+2p^3+5p^2+2p+1), & (2\mid N)\\ 2(4p^6+9p^5+14p^4+12p^3+14p^2+9p+4), & (2\nmid N),\end{cases}$$

$$h_2(p):=\begin{cases}(p+1)^2(p^4+3p^3+p^2+3p+1), & (2\mid N),\\ 2(p+1)(p+3)(p^4+p^3+p^2+p+1), & (2\nmid N)\end{cases}$$

である．なお，n が平方因子をもたない場合の $c^{(2)}_{\Gamma_0(n)}(0)$ は [11] で得られたものと同一である．

4.3 $\Gamma=\hat{\Gamma}(n)$ の場合

n を奇数とする．$\Gamma=\hat{\Gamma}(n)$ に対して，$p\mid n$ のとき $\Gamma\Gamma(p^r)=\hat{\Gamma}(p^{\min(r,\mathrm{ord}_p n)})$ で，そうでないとき $\Gamma\Gamma(p^r)=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ である．また，$[\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}):\hat{\Gamma}(p^N)]=p^{3N-2}(p^2-1)/2$ なので，$N\leq r$ のとき

$$\#\Gamma(p^r)\backslash\hat{\Gamma}(p^N)=2p^{3(r-N)}$$

である．$\#\{\gamma\in\Gamma(p^r)\backslash\hat{\Gamma}(p^N)\mid \mathrm{tr}\gamma\equiv t \bmod p^r\}$ は次で与えられる．

Lemma 4.2. p^N, p^r を素べき（$N\leq r$）とし，$1\leq l\leq r-1$ とする．このとき，次が成り立つ．

$$\#\left\{\gamma\in\Gamma(p^r)\backslash\hat{\Gamma}(p^N)\mid \mathrm{tr}\gamma\equiv t \bmod p^r\right\}$$
$$=\begin{cases} p^{2r-N-1}(p-1), & ((T/p)=-1),\\ p^{2r-N-1}(p+1), & ((T/p)=1 \ or\ p^l\,||\,T, 2\mid l, (\frac{T}{p^l}/p)=1)),\\ p^{2r-N}+p^{2r-N-1}-2p^{2r-l/2-1}, & (p^l\,||\,T, 2\mid l, (\frac{T}{p^l}/p)=-1),\\ p^{2r-N}+p^{2r-N-1}-p^{2r-(l+1)/2}-p^{2r-(l+3)/2}, & (p^l\,||\,T, 2\nmid l),\\ p^{2r-N}+p^{2r-N-1}-p^{\lfloor(3r-1)/2\rfloor}, & (T\equiv 0),\\ 0, & (t\not\equiv\pm 2 \bmod p^{2N}),\end{cases}$$

ここで，$t\equiv\mp 2 \bmod p^{2N}$ に対して，$T:=(t\pm 2)/p^{2N}$ である． □

$\Gamma=\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ と同じように計算すると，

$$c^{(2)}_{\hat{\Gamma}(n)}(0)=\frac{1015}{864}\prod_{p\geq 3, p\nmid n}\frac{p^2(p^3+p^2-p-3)}{(p-1)^2(p+1)^3}\prod_{p^N\,||\,n}\frac{p^{2N-1}(p^2+p+1)}{2(p+1)},$$

$$c^{(3)}_{\hat{\Gamma}(n)}(0)=\frac{682495}{428544}\prod_{p\geq 3, p\nmid n}\frac{p^8+p^7+p^6-5p^5-5p^3-5p^2-p-1}{(p-1)^2(p+1)^2(p^4+p^3+p^2+p+1)}$$
$$\times\prod_{p^N\,||\,n}\frac{p^{4N-2}(p^6+p^5+4p^4+p^3+4p^2+p+1)}{4(p^4+p^3+p^2+p+1)}$$

を得る．

謝辞: 本研究集会の代表者である木本一史氏（琉球大学）と，研究集会参加のための旅費を補助してくださった京都大学数理解析研究所に，謹んで感謝の意を表します．

参考文献

[1] R. Aurich J. Marklof, 'Trace formulae for three-dimensional hyperbolic lattices and application to a strongly chaotic tetrahedral billiard', *Phys. D* 92 (1996), 101–129.

[2] E. Bogomolny, B. Georgeot, M.J. Giannoni C. Schmit, 'Arithmetical chaos', *Physics Reports* 291 (1997), 219–324.

[3] E. Bogomolny, F. Leyvraz C. Schmit, 'Distribution of eigenvalues for the modular group', *Commun. Math. Phys.* 176 (1996), 575–617.

[4] E. Bogomolny C. Schmit, 'Multiplicities of periodic orbit lengths for non-arithmetic models', *J. Phys. A* 37 (2004), 4501–4526.

[5] C. F. Gauss, 'Disquisitiones arithmeticae', Fleischer, Leipzig, (1801).

[6] S. Geninska E. Leuzinger, 'A geometric characterization of arithmetic Fuchsian groups', *Duke Math. J.* 142 (2008), 111–125.

[7] Y. Hashimoto, 'Arithmetic expressions of Selberg's zeta functions for congruence subgroups', *J. Number Theory* 122 (2007), 324–335.

[8] Y. Hashimoto, 'Correlations of multiplicities in length spectra for congruence subgroups', arXiv.math/1202.2603.

[9] D. Hejhal, 'The Selberg trace formula of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ I, II', Springer Lec. Notes in Math. **548, 1001** Springer-Verlag (1976, 1983).

[10] H. Huber, 'Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen I, II', *Math. Ann.* 138 (1959), 1–26, 142 (1961), 385–398 and 143 (1961), 463–464.

[11] V. Lukianov, 'A mean value theorem for closed geodesics on congruence surfaces', *Forum Math.* 19 (2007), pp.851–903, http://www.math.tau.ac.il/~rudnick/students /lukianovthesis.pdf (Ph. D thesis version, Tel-Aviv University, 2005).

[12] W. Luo P. Sarnak, 'Number variance for arithmetic hyperbolic surfaces', *Commun. Math. Phys.* 161 (1994), 419–432.

[13] J. Marklof, 'On multiplicities in length spectra of arithmetic hyperbolic three-orbifolds', *Nonlinearity* 9 (1996), 517–536.

[14] M. Peter, 'The correlation between multiplicities of closed geodesics on the modular surface', *Commun. Math. Phys.* 225 (2002), 171–189.

[15] B. Randol, 'The length spectrum of a Riemann surface is always of unbounded multiplicity', *Proc. Amer. Math. Soc.* 78 (1980), 455–456.

[16] Z. Rudnick, 'A central limit theorem for the spectrum of the modular group', *Ann. Henri Poincare* 6 (2005), 863-883.

[17] P. Sarnak, 'Class numbers of indefinite binary quadratic forms', *J. Number Theory* 15 (1982), 229–247.

[18] P. Schmutz, 'Arithmetic groups and the length spectrum of Riemann surfaces', *Duke Math. J.* 84 (1996), 199–215.

[19] W. Schwarz J. Spilker, 'Arithmetical functions', *London Mathematica Society LNS* 184, Cambridge University Press, 1994.

[20] A. Selberg, 'Collected Papers I', Springer-Verlag (1989).

[21] T. Sunada, 'L-functions in geometry and some applications', Curvature and topology of Riemannian manifolds (Katata, 1985), 266–284, *Lecture Notes in Math.* 1201, Springer, Berlin, 1986.

[22] K. Takeuchi, 'A characterization of arithmetic Fuchsian groups', *J. Math. Soc. Japan* 27 (1975), 600–612.

[23] A. B. Venkov P. G. Zograf, 'Analogues of Artin's factorization formulas in the spectral theory of automorphic functions associated with induced representations of Fuchsian groups', *Math. USSR Izvestiya* 21(1983), 435–443.

〒 900-0012 沖縄県中頭郡西原町字千原 1 番地
琉球大学理学部数理科学科
e-mail: hashimoto@math.u-ryukyu.ac.jp